А. Д. ГЕТМАНОВА

О соотношении математики и логики в системах типа *«Principia Mathematica»*[*]

Развитие математической логики, связанное в значительной мере с задачами обоснования математики, позволило создать такие «логические системы», в которых удается определить основные математические понятия в терминах логики и доказать, пользуясь только строго сформулированными и заранее перечисленными правилами вывода, основные предложения математики (аксиомы арифметики), из которых, как можно было думать, остальные ее предложения должны были выводиться по правилам логики. Такими «логическими системами» («большими логиками», как их иногда называют) были прежде всего: система «Основных законов арифметики» Г. Фреге, — в которой Б. Рассел обнаружил, однако, противоречие, — и система самого Рассела, разработанная им в сотрудничестве с Уайтхедом в их известном совместном трехтомном труде «Principia Mathematica».

Создание такой системы, как «Principia Mathematica», естественно, поставило вопрос о том, является ли эта система полной, т. е. удается ли по ее правилам действительно доказать все содержательно истинные предложения математики. Этот вопрос является особенно важным потому, что как сам Рассел, так и его последователи, представители так называемого логицизма в математике, сделали из возможности таких систем, как «Principia Mathematica», вывод о том, что математика будто бы вообще сводится к логике, а это, в свою очередь, было истолковано ими как доказательство априорного характера чистой математики, ее независимости от окружающего нас действительного мира. Вопрос о том, сводится ли в действительности математика к логике, приобрел, таким образом, большой методологический интерес в борьбе материализма, с идеализмом вокруг проблем обоснования математики[**] <...>

---

[*] Статья является изложением первых двух параграфов гл. III диссертации автора, выполненной под руководством С. А. Яновской.

[**] Сокращения в тексте — это отступления, а которых прямо не обсуждаются идеи Рассела. — *Прим. науч. ред.*

Строя свою «логическую систему» «Principia Mathematica», Рассел настолько верил в тривиальный и априорный характер математических истин, что рассчитывал даже на то, что ему удастся когда-нибудь дать эффективный критерий, позволяющий по виду отличать «тривиальные» (логические) предложения от не логических — эмпирических <...>

Теорема Гёделя заслуживает подробного рассмотрения. Она была открыта австрийским математиком и логиком Куртом Гёделем в 1931 г. и изложена им впервые в знаменитой работе «О формально неразрешимых предложениях “Principia Mathematica” и родственных систем». Теорема Гёделя неоднократно, в том числе и популярно, излагалась другими авторами, приводились новые доказательства, устанавливались общие условия применимости этой теоремы к различным логическим системам. Здесь следует прежде всего отметить книгу польского математика и логика А. Московского. Освещение теоремы Гёделя мы начнем с цитаты из введения к этой книге:

«Проблема полноты формализованных систем имеет важное значение потому, что она выявляет степень трудности формализации содержательной математики даже для того случая, когда мы ограничиваемся той частью математики, которая имеет дело с целыми числами. Как мы увидим в дальнейшем, *никакая формализованная система S не может быть полной, если некоторая вполне определенная часть арифметики целых чисел адекватно выразима в S*. Мы покажем неполноту таких систем *S*, строя для каждой *S* арифметическое предложение, которое неразрешимо в *S*. Это неразрешимое предложение, как мы увидим, содержательно очевидно и становится доказуемым, если мы усилим систему *S*, добавив некоторое число содержательно очевидных аксиом и правил вывода. Отсюда следует, что никакая система *S*, к которой применим описанный выше метод, *не может совпадать с содержательной математикой*. Важно отметить, что метод, о котором идет речь, настолько общ, что он практически применим ко всем системам *S*, заслуживающим названия формализованной арифметики»[*].

Таким образом, не только никакая «чисто логическая», т. е. не содержащая внелогических постоянных, логическая система, но вообще никакая строящаяся по точным формальным и эффективно выполнимым правилам[**] *формализованная* арифметика не совпадает полностью с *содержательной* арифметикой.

---

[*] *Mostowski A.* Sentences Undecidable in Formalized Arithmetic. An Exposition of the Theory of Kurt Gödel. Studies on Logic and Foundations of Mathematics, Amsterdam, 1952. С. 3–4.

[**] Которые к тому же в каждом доказательстве могут применяться только конечное число раз.

Основные понятия и истины арифметики могут быть выражены на «языке» (т. е. в терминах) «Principia Mathematica», могут быть эффективно «формализованы» в этой системе. Но именно поэтому система «Principia Mathematica» оказывается уже *неполной*: не все содержательные арифметические истины, выразимые ее средствами, могут быть *доказаны в ней*. Но тогда ясно, что содержательная арифметика предшествует формализованной арифметике, что формализация, уточняющая определенным образом понятия и методы арифметики, играет роль *лишь вспомогательного* средства, позволяющего лучше разобраться в содержании арифметики, имеющем объективный, независимый от выбора языка смысл.

Для тех читателей, которые хотят ближе представить себе сущность теоремы Гёделя, мы приведем краткую идею доказательства этой теоремы. Разумеется, здесь не удастся осветить основные трудности этого доказательства.

1. С помощью так называемой «гёделизации» всякое высказывание о формулах и доказательствах переводится в некоторое высказывание о числах, в арифметическое высказывание. Для того чтобы это можно было сделать, логическая система должна быть достаточно сильной. Система «Principia Mathematica» Рассела и Уайтхеда достаточно сильна для этого.

2. Система достаточно сильна и для того, чтобы ее средствами можно было записать (выразить, построить) *формулу, которая говорит о самой себе*, *что она недоказуема в системе* «Principia Mathematica». Так же обстоит дело и в других достаточно сильных системах, поэтому в дальнейшем мы будем говорить не о «Principia Mathematica», а более неопределенно: о некоторой логической системе S.

3. Назовем формулу, которая говорит о самой себе, что она недоказуема в системе S, буквой Ф. Тогда мы будем иметь *доказанную* эквивалентность

$$\Phi \equiv (\Phi \text{ недоказуема в } S)^{*}. \qquad (1)$$

4. Докажем теперь, что Ф — недоказуемая в S формула. Действительно, *если бы* Ф *была доказуемой* в S формулой, то левая часть доказанной эквивалентности (1) была бы доказана, а тогда, значит, была бы доказана и правая ее часть (предполагается, что такого рода простейшие правила вывода во всяком случае имеются в системе S). Иными словами, было бы доказано, что Ф *недоказуема* в S. Но ведь к этому выводу мы пришли, исходя из предположения, что Ф — *доказуемая в* S *формула*. Полученное противоречие свидетельствует

* Эта формула читается так: «формула Ф эквивалентна формуле (Ф недоказуема в S)».

о том, что наше предположение неверно*, т. е. что *нельзя* предположить, что Ф — доказуемая в S формула. Значит, Ф — недоказуемая в S формула.

5. Но ведь Ф и говорит, что Ф недоказуема в S. Следовательно, Ф говорит правду, т. е. Ф истинная формула.

Итак, мы построили истинную, но в то же время недоказуемую в *S арифметическую* формулу. И притом построили эффективно. Таким образом ясно, что система S действительно не полна: не вся содержательная арифметика в ней находится. Такова, в частности, и система «Principia Mathematica».

Так как система S по предположению непротиворечива** и представляет собой формализацию содержательной арифметики, содержательно ложные предложения арифметики в ней заведомо не доказуемы. Но так как формула Ф истинна, то отрицание ее Ф ложно. Поэтому Ф тоже недоказуемая формула. Итак, ни Ф, ни Ф недоказуемы в S. Такого рода формулы называются *неразрешимыми* в S. Построение Гёделя, на котором основано доказательство его теоремы, и есть поэтому построение формулы, неразрешимой в формализованной системе S.

Ясно теперь, что среди моделей системы S могут быть как такие, в которых формула Ф верна (такой, например, является обычная содержательная арифметика), так и такие, в которых Ф не верна (так называемые нестандартные модели). Ведь верными во всех моделях должны быть только *доказуемые* формулы системы S, а ни формула Ф, ни ее отрицание не доказуемы! Но если предложение в одной модели верно, а в другой неверно, то как же в нем могут фигурировать только логические постоянные? Ведь логические константы имеют одно и то же значение во всех моделях!

Следовательно, среди постоянных, фигурирующих в арифметической формуле Ф, должны быть внелогические, арифметические постоянные. Тот смысл, который эти постоянные имеют в обычной содержательной арифметике, и есть их специфический арифметический смысл.

Мы видим, таким образом, что системы, аналогичные «Principia Mathematica» Рассела и Уайтхеда, не только не способны включить (формализовать) всю содержательную арифметику, но что даже та часть арифметики, которая получает отражение в этих системах, не становится при этом *логикой*. Даже внутри этих формализованных систем существует объективное различие между логическими

---

* Система S предполагается непротиворечивой.

** Непротиворечивость может пониматься при этом в смысле существования модели, удовлетворяющей условиям, о которых шла речь выше.

и внелогическими (математическими) понятиями и соответствующими им терминами.

Но все постоянные в «Principia Mathematica» выражаются в терминах логики. Как же объяснить наличие среди них внелогических постоянных? Нельзя ли вообще предложить такой способ построения «логических систем», по силе не уступающих «Principia Mathematica», в которых внелогические постоянные строго отличались бы от логических, даже если первые выражены в терминах логических постоянных, в которых математическая часть системы отделялась бы от чисто логической?

На этот вопрос правильный, на наш взгляд, ответ дает работа советского ученого Д. А. Бочвара*. С целью облегчить читателю подход к идее Бочвара, остановимся на примерах некоторых индивидуальных (постоянных) предикатов, встречающихся в «Principia Mathematica».

У представителей логицизма, начиная с Фреге и Рассела, сведение математики к логике осуществляется путем, во-первых, включения в логику теории множеств, трактующейся при этом как та часть логики, которая занимается объемом понятий, и во-вторых, путем определения основных понятий арифметики — к которой они считают сводимой всю «чистую» математику — в теоретико-множественных терминах. Так, число 1 при этом определяется как множество всех множеств M, обладающих следующими свойствами:

(а) каждое M не пусто, т. е. содержит какие-либо элементы;

(б) если установлено, что x и y суть элементы M, то x совпадает с y.

Аналогично, число 2 определяется как множество всех множеств M, характеризующихся тем, что (а) существуют такие различные предметы x и у, которые являются элементами M; (б) всякий предмет z, о котором установлено, что он является элементом M, совпадает либо с x, либо с y <...>

Наоборот, уже такие понятия, как «единица» и «двойка», которые, как мы видели, могут быть определены с помощью понятия тождества, принадлежат тем не менее к той части системы «Principia Mathematica», для которой теорема полноты уже не имеет места. Как мы уже видели, логические системы такого рода отличаются тем, что в них заведомо имеются предложения, верные в одной модели и неверные в другой. Эти системы допускают, как теперь принято говорить в таких случаях, *неизоморфные* модели, т. е. в них должны существовать внелогические постоянные. Между тем такие постоянные, как «импликация», «отрицание», «кванторы» и «знак

* *Бочвар Д. А.* К вопросу о парадоксах математической логики и теории множеств. Мат. сб., т. 15 (57), № 3, 1944.

равенства», естественно, как мы уже видели, считать логическими. Какие же постоянные следует рассматривать как внелогические? Обратимся к указанной выше работе Д. А. Бочвара.

На вопрос, как отличать внелогические постоянные от логических, Д. А. Бочвар отвечает так: поскольку логика относится к любой предметной области, в ней не может идти речь ни о каких индивидуальных предметах. Предикат, выражающий собою свойство или отношение, характерное для каких-нибудь определенных предметов, в свою очередь тоже является предметом, о котором может идти речь. Даже если такой предмет определяется только с помощью логических терминов импликации, отрицания, кванторов и тождества, то из этого еще не следует автоматически его существование в какой-нибудь, и тем более в любой, предметной области. Между тем всякое определение, не являющееся просто сокращением, заключает в себе аксиому, утверждающую *существование* определяемого предмета. Такого рода аксиомы носят уже внелогический характер. Если они не сводятся просто к утверждению о непустоте рассматриваемой области, то могут быть, например, неверны в какой-нибудь предметной области, состоящей только из одного предмета, почему и не могут считаться верными в любой предметной области. Всякий индивидуальный предикат следует рассматривать поэтому как внелогический, а соответствующий ему символ (имя) как внелогическую постоянную.

В формализованных типа «Principia Mathematica» теориях Бочвар предлагает выделить чисто логическую часть — сформулированное им исчисление K_0, непротиворечивость (и полнота) которого легко доказывается и в котором, помимо предиката тождества, нет вообще никаких индивидуальных предикатов.

Исчисление K_0 Бочвара представляет собой расширенное исчисление предикатов без теории типов, в котором нет никаких специальных терминов для выражения конкретных свойств или соответствующих им множеств предметов, обладающих этими свойствами. В K_0 нет поэтому ни понятий мощности множества (кардинального числа), ни понятия трансфинитного порядкового числа, ни каких-либо индивидуальных чисел («один», «два», «три» и т. д.), ни такого понятия, как «следующий за» и т. п.

Как известно, основные теоретико-множественные понятия отнюдь не являются столь простыми и предшествующими понятиям обычной арифметики, как это представляется на первый взгляд. Распространение на бесконечные множества привычных правил обращения с конечными множествами* не всегда является обоснован-

* Правил, позволяющих, например, имея некоторую совокупность непустых множеств, образовать новое множество, выбрав из каждого множества этой

ным. Особые трудности, делающие теоретико-множественные понятия и методы неконструктивными, связаны при этом с применением закона исключенного третьего. Как известно, понятия и методы так называемой «наивной» теории множеств таят в себе опасность парадоксов, многие из которых действительно были обнаружены. Таковы, например, парадокс Рассела о множестве всех нормальных множеств, который обнаружен Расселом в системе Фреге, парадокс Кантора, связанный с понятием множества всех множеств, парадокс «лжеца», известный еще древним грекам, и многие другие. Со всеми этими парадоксами удается справиться различными способами, ни один из которых не позволяет, однако, построить такую логическую систему, которая была бы заведомо непротиворечива и включала бы в то же время в себя всю содержательную арифметику.

Система K_0 Бочвара непротиворечива. Но она не претендует на формализацию арифметики. Даже такие арифметические понятия, которые выразимы в терминах его системы, принадлежат, по Бочвару, не к этой логической системе, а к арифметике, поскольку они являются индивидуальными предикатами. Хотя система K_0 представляет собой расширенное исчисление предикатов без теории типов, но, так как она непротиворечива, никаких парадоксов в ней нет. Более того, все приведенные выше парадоксы получают в ней полное разрешение: они превращаются в доказательство несуществования в предметной области соответствующего индивидуального предиката.

Так, например, парадокс Рассела о множестве всех нормальных (т. е. не содержащих самих себя в качестве элемента) множеств, становится доказательством несуществования такого множества. (Заметим, что это означает на самом деле — поскольку предметная область состоит только из фиксированных предметов, о которых можно рассуждать по законам классической формальной логики, — что множество всех нормальных множеств нельзя рассматривать как фиксированный предмет, не изменяющийся в то время, пока о нем идет речь.)

Разумеется, система K_0, как всякая вообще система логических правил вывода, имеет смысл не сама для себя, а в применении к каким-нибудь специальным (индивидуальным) предметам, их свойствам или отношениям, т. е. в применении к какой-нибудь определенной научной области. Добавление к системе K_0 индивидуальных предикатов и определяющих их аксиом, относящихся к той или иной конкретной научной дисциплине, не означает при этом сведения этой дисциплины к логике. Оно равносильно утверждению (или гипотезе)

совокупности по элементу (так называемая аксиома выбора); или, имея какое-нибудь множество, представить себе множество всех его подмножеств, и т. п.

о применимости логических правил вывода, образующих систему K_0, в данной научной области. Если какие-нибудь законы (например, закон исключенного третьего) не применимы или имеют лишь ограниченную применимость в этой области, то систему K_0 можно видоизменить, заменив ее системой, более приспособленной к проблематике этой области (например, какой-нибудь конструктивной логической системой), но также без индивидуальных предикатов.

Мы не будем здесь останавливаться на технической стороне исчисления K_0. Приведем в качестве примера доказательство несуществования такого предмета, как множество всех нормальных множеств или соответствующего этому множеству предиката $F(\Phi)$, определяемого формулой

$$F(\mathit{\Phi}) \equiv \overline{\Phi(\Phi)}, \tag{1}$$

где Φ — предикатная переменная, F — предикат, определяемый формулой (1).

Если бы в предметной области существовал индивидуальный предикат F, удовлетворяющий формуле (1), то, подставляя его на место переменного Φ в формулу (1), мы получили бы

$$F(F) \equiv \overline{\mathrm{F}(\mathrm{F})},$$

т. е. противоречие, поскольку $A = A$ означает, что если A верно, то A — неверно, если же A неверно, то A — верно. Из этого противоречия естественно следует, что предположение о существовании (в предметной области) индивидуального предиката A неверно.

Но такое рассуждение полностью формализуется в исчислении K_0, т. е. выполняется по правилам этого исчисления*.

Действительно, нетрудно показать, что в исчислении K_0 имеет место правило, которое гласит: если, добавив к аксиомам этого исчисления некоторую формулу, мы придем, применяя правила этого исчисления, к противоречию, то в самом исчислении (без всяких добавлений к нему) доказуемо отрицание добавленной нами формулы.

В качестве добавляемой к исчислению K_0 возьмем формулу

$$\exists F \forall \mathit{\Phi}(F(\Phi) \equiv \overline{\Phi(\Phi)}). \tag{2}$$

По правилам исчисления K_0 можно:

А) «Отбросить» квантор существования F в формуле (2), что соответствует обычному в математических (и других) рассуждениях

* Для упрощения изложения мы здесь не следуем способу вывода, которым пользуется Д. А. Бочвар.

переходу, осуществляемому с помощью фраз такого вида: «Назовем этот существующий, по предположению, объект буквой А». Мы получим, таким образом, формулу

$$\forall\Phi(F(\Phi)) \equiv \overline{\Phi(\Phi)}), \tag{3}$$

где букву А нельзя будет трактовать как переменную (на место буквы А нельзя будет сделать никакой подстановки или применить к ней правило обобщения).

Б) Применяя к формуле (3) правило, соответствующее аксиоме dictum de omni $(x\text{ƻ}(x)\to\text{ƻ}(y))$ (в нашем случае «если нечто верно для всех предикатов Φ, то оно верно и для предиката А»), можно получить

$$F(F) \equiv \overline{\mathrm{F}(\mathrm{F})}. \tag{4}$$

В) Но (4) — формула вида ƻ, которая, уже по правилам исчисления высказываний, содержащегося в K_0, эквивалентна формуле ƻ, т. е. противоречию.

Г) Из полученного таким образом противоречия можно немедленно заключить, что формула (2), служившая предпосылкой нашего рассуждения, неверна, т. е. что доказана формула

$$\exists\overline{\mathrm{F}}\forall\Phi\,(F(\Phi)) \equiv \overline{\Phi(\Phi)}), \tag{5}$$

утверждающая несуществование предиката F, удовлетворяющего условию, равносильному (1) (в смысле доказуемости: «дедуктивно-равному» условию (1)):

$$\forall\Phi\,(F(\Phi)) \equiv \overline{\Phi(\Phi)}). \tag{1$'$}$$

Таким образом, в исчислении K_0 действительно доказано, что в предметной области нет предиката, определяющего множество всех нормальных множеств.

Мы видим, что идея Бочвара позволяет не только выделить в «логических системах» подлинно логическую часть и отличить логические постоянные от внелогических (от индивидуальных предикатов, специфических для данной научной области), но и элиминировать парадоксы, не прибегая к теории типов.

Нам представляются поэтому весьма убедительными выводы Д. А. Бочвара. Вот что он пишет:

«1. Логика не противоречива. Не существует никаких логических парадоксов.

2. Все парадоксы возникают вследствие присоединения к системе логических аксиом специальных аксиом, утверждающих существование в области объектов определенных предикатов со свойствами, противоречащими аксиомам логики.

3. Математика не выводима из формальной логики, ибо для построения математики необходимы аксиомы, устанавливающие определенные факты в области объектов и прежде всего — существование в последней определенных объектов. Но такие аксиомы обладают уже внелогической природой.

4. Математика не является собранием тавтологических истин. Нетривиальность содержания математической дисциплины обеспечивается нетривиальностыо ее аксиом и, прежде всего, аксиом существования.

5. Тогда как даже формализованная математика невыводима из логики, известная интуиционисткая математика предполагается логикой.

6. Система “Principia Mathematica” представляет собой не чистую логику, а особую математическую дисциплину — специальную теорию предикатов (от n переменных (n=1,2, ...)), построенных в терминах логики (т. е. из элементов логической символики). В теории предикатов в широких пределах формализуется математика и прежде всего теория множеств, особенно родственная теории предикатов»*.

Убедительность этих выводов, на наш взгляд, обусловливается их полным соответствием с принципами материалистической диалектики. Ведь из работы Д. А. Бочвара следует непосредственно, что даже если мы начнем с того, что ограничим себя, по условию, лишь рассмотрением таких предметных областей, все предметы которых строго отличны друг от друга и абсолютно неизменны, то, изучая их, неизбежно встретимся с такими понятиями (и соответствующими им абстрактными предметами), которые этому требованию строгой фиксированности и неизменности не будут удовлетворять. Всякий парадокс в конечном итоге превратится как раз в доказательство того, что предмет, для которого он получается, не обладает этим свойством неизменности, почему и высказывание о нем не подчиняется законам классической двузначной логики. С помощью диалектико-материалистического принципа конкретности истины, учитывая условия, обстановку, место и время, эти высказывания можно, конечно, так уточнить, что к ним снова будут применимы законы классической формальной логики. Но требование конкретности рассмотрения опять приведет нас к необходимости изменять и развивать наши понятия и теории.

* *Бочвар Д. А.* К вопросу о парадоксах математической логики и теории множеств. Мат. сб., т. 15 (57), № 3, 1944. С. 382.